Test na studia III stopnia z matematyki
Wydział Matematyki i Informatyki UJ
14 września 2017

Przed Państwem test wielokrotnego wyboru. Po zapoznaniu się z pytaniami, proszę zaznaczyć w tabeli, na załączonej kartce, poprawne odpowiedzi do wybranych przez siebie 15 zadań oraz zaznaczyć te zadania, które Państwo wybrali. Punktacja pojedynczego pytania, gdy zaznaczono:

- wszystkie poprawne odpowiedzi (i żadnych niepoprawnych): **4 pkt**,
- tylko poprawne odpowiedzi, ale nie wszystkie: **2 pkt**,
- poprawne i niepoprawne odpowiedzi lub brak zaznaczenia: **0 pkt**,
- tylko niepoprawne odpowiedzi: **-1 pkt**.

Z testu można uzyskać 60 punktów: 15 pytań $\times$ 4 pkt = 60 pkt. Uzyskany wynik zostanie przemnożony przez 5/6.

**1.** Dla dowolnych macierzy $3 \times 3$ $A$ i $B$ zachodzi:

A. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

B. ślad macierzy $AB$ jest równy iloczynowi śladów macierzy $A$ i $B$,

C. ślad macierzy $AB$ jest równy śladowi macierzy $BA$,

D. $AB = BA$,

E. rząd macierzy $AB$ jest równy sumie rzędów macierzy $A$ i $B$.

**2.** Poniżej $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ to ciąg liczb rzeczywistych.

A. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\limsup_{n\to\infty} |a_n| < \infty$.

B. Jeśli $\lim_{n\to\infty} n^k a_n = 0$ dla dowolnej liczby całkowitej $k > 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\alpha}$ jest bezwzględnie zbieżny dla każdej liczby rzeczywistej $\alpha$.

C. Jeśli $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny.

D. Jeżeli $a_n \leqslant b_n$ dla wszelkich $n > 0$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

E. Jeśli $a_n \neq 0$ dla wszystkich $n$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są albo oba zbieżne, albo oba rozbieżne.

**3.**

A. Istnieje nieskończona grupa nieabelowa, która ma nieskończenie wiele parami nieizomorficznych skończonych podgrup abelowych.

B. Jeśli $a^2 = a$ dla dowolnego elementu $a$ pierścienia $R$, to $R$ jest pierścieniem przemiennym.

C. Jeśli $a$ jest elementem nierozkładalnym w przemiennym pierścieniu $R$, to $(a)$ jest ideałem pierwszym.

D. Każdy pierścień Euklidesa jest pieścieniem ideałów głównych.

E. Skończony pierścień całkowity jest ciałem.

**4.** Niech $X$ będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Wtedy:

A. $X$ ma rozkład dyskretny.

B. $P(X > t + x | T > x) = P(T > x)$ dla $t, x > 0$.

C. $EX = 1/\lambda$.

D. Rozkład zmiennej $X$ ma gęstość $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

E. $P(X = 0) > 0$.

**5.**

A. Jeśli $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest niestałą funkcją ciągłą, taką że $g(z+w) = g(z) + g(w)$ i $g(zw) = g(z)g(w)$ dla wszelkich $z, w \in \mathbb{C}$, to $g(z) = z$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

B. Funkcja $u\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dana wzorem $u(z) = z + \frac{1}{z}$ ma następującą własność: zbiór $u^{-1}(\{w\})$ jest dwuelementowy dla wszelkich $w \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$.

C. Ciąg $(z^n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny dla wszystkich liczb zespolonych $z$ o module nie większym niż 1.

D. $\mathrm{Re}[(1+i)^{2018}] = 0$.

E. Dla dowolnej liczby całkowitej $k > 0$:

$$\left(\sin\left(\frac{2\pi}{k}\right) + i\cos\left(\frac{2\pi}{k}\right)\right)^k = i^k.$$

**6.** Niech $H$ oznacza przestrzeń Hilberta $L^2([0,2\pi])$.

A. Jeśli $f,g\colon [0,2\pi]\to\mathbb{R}$ są ciągłe oraz $f\perp g$, to nośniki $f$ i $g$ są rozłączne.

B. Jeśli $f,g\colon [0,2\pi]\to\mathbb{R}$ są ciągłe oraz nośniki $f$ i $g$ są rozłączne, to $f\perp g$.

C. W $H$ nie ma przeliczalnej bazy ortonormalnej.

D. Rzut ortogonalny funkcji $f(x) = x\cdot\chi_{[0,1]}(x)$ (tutaj $\chi_{[0,1]}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $[0,1]$) na podprzestrzeń funkcji stałych przestrzeni $H$ jest równy $g(x)=\frac{1}{2}$.

E. Dopełnienie ortogonalne zbioru $\{1,x,x^2\}$ jest przestrzenią wymiaru nieskończonego.

---

**7.** Które z poniższych zdań są prawdziwe?

A. Zbiór Vitalego nie jest zbiorem borelowskim.

B. Wszystkie zbiory borelowskie w $\mathbb{R}^n$ są mierzalne w sensie Lebesgue'a,

C. Każdy podzbiór trójkowego zbioru Cantora jest zbiorem borelowskim.

D. Każdy podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest mierzalny w sensie Lebesque'a.

E. Każdy podzbiór trójkowego zbioru Cantora jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesque'a.

---

**8.** Poniżej $A$ i $B$ to zespolone macierze kwadratowe tego samego stopnia.

A. Jeśli macierz $AB$ jest odwracalna, to $A$ i $B$ są odwracalne.

B. Jeśli wszystkie wyrazy macierzy $A$ są rzeczywiste, to $A$ ma przynajmniej jedną rzeczywistą wartość własną.

C. Jeśli macierz $B$ jest odwracalna, to wielomiany charakterystyczne macierzy $B^{-1}AB$ i $BAB^{-1}$ są identyczne.

D. Jeśli wszystkie wyrazy macierzy $A$ są rzeczywiste i $A^2=0$, to $A=0$.

E. $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$.

---

**9.**

A. Dla parametru $\alpha\in\mathbb{R}$, całka niewłaściwa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2)^\alpha+1}\,\mathrm{d}x$$

jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha\geqslant 1$.

B. Jeśli $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, taką że

$$f(-x,-y) = -f(y,x)$$

dla wszelkich $x,y\in\mathbb{R}$, to

$$\iint_{\{x^2+y^2\leqslant 1\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

C. $\int_0^2 |x^3-x|\,\mathrm{d}x = 2$.

D. Dla dowolnej liczby $A>0$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^A \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.

E. Funkcja $\mathbb{R}\ni x\mapsto \int_0^1 \ln(1+e^y+x^2)\,\mathrm{d}y\in\mathbb{R}$ jest ciągła.

---

**10.** Grupą prostą jest:

A. $\mathbb{Z}/2$

B. $\mathbb{Z}/6$

C. $S_3$

D. $A_4$

E. $A_5$

---

**11.** Poniżej $X$ i $Y$ to zmienne losowe na pewnej wspólnej przestrzeni probabilistycznej.

A. Jeśli zmienna $X$ jest niezależna od siebie samej, to $X=0$ prawie wszędzie.

B. $E(X^2)\leqslant (E(X))^2$

C. Jeśli zmienne $X$ i $Y$ są niezależne i mają ten sam rozkład, to zmienna $Z=\frac{1}{2}(X+Y)$ ma również taki sam rozkład.

D. Jeśli zmienna $X$ ma rozkład ciągły o gęstości $f$, to $E(e^X)=\int_{-\infty}^{\infty} e^t f(t)\,\mathrm{d}t$.

E. Jeśli zmienne $X$ i $Y$ są niezależne i mają ciągłe rozkłady, to $P(X^2+Y^2=1)=0$.

---

**12.** Które z poniższych własności są prawdziwe dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

A. Jeśli $A$ jest niespójny, to $f(A)$ też jest niespójny.

B. Jeśli $f(A)$ jest zwarty, to $A$ też jest zwarty.

C. Jeśli $A$ jest domknięty, to $f(A)$ nie jest otwarty.

D. Jeśli $A = [1, 2] \cup [3, 4]$, to $f(A)$ jest ograniczony.

E. Jeśli $A = [1, 2] \cup [3, 4]$, to $f(A)$ ma co najwyżej dwie składowe spójne.

---

**13.**

A. Układ funkcji $x \mapsto e^{2x}$, $x \mapsto xe^{2x}$ stanowi bazę przestrzeni wektorowej składającej się z wszystkich funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniających równanie różniczkowe $f'' - 4f' + 4f = 0$.

B. Nie istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy $C^\infty$, która spełnia równania $f^{(4)} + f = 0$ oraz $f(0) = 1$.

C. Punkt $(0, 0)$ jest atraktorem układu $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x \end{cases}$.

D. Jeśli $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy $C^\infty$, to każda funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie różniczkowe $f'(x) = F(f(x), x)$ również jest klasy $C^\infty$.

E. Istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla której nie istnieje funkcja różniczkowalna $u\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, taka że $u(0) = 0$ oraz $u' = f \circ u$.

---

**14.**

A. Każdy częściowy porządek $R \subset X \times X$ na zbiorze $X$ zawiera się w pewnej relacji $S \subset X \times X$, która jest liniowym porządkiem na $X$.

B. Jeśli $a$ i $b$ to dwa róźne elementy nieskończonego zbioru $X$, to istnieje bijekcja z $X$ na $X \setminus \{a\}$, dla której $b$ jest punktem stałym.

C. W zbiorze dobrze uporządkowanym istnieje co najwyżej jeden element, który nie ma poprzednika.

D. Jeśli $u\colon X \to \mathcal{P}(X)$ jest dowolną funkcją (gdzie $\mathcal{P}(X)$ to zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $X$), to zbiór $\{x \in X\colon\ x \notin u(x)\}$ nie jest wartością funkcji $u$.

E. Zbiór wszystkich ciągów rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.

---

**15.** Odwzorowanie liniowe $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ma w bazie kanonicznej macierz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Wtedy:

A. $F$ jest epimorfizmem,

B. $F$ jest monomorfizmem,

C. wektor $(2, 4, 0, 9)$ należy do obrazu $F$,

D. $\det(A) = 239$,

E. 9 jest wartością własną macierzy $A$.

---

**16.**

A. Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy $C^1$ i jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$, to istnieją wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu w punkcie $(0, 0)$.

B. Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie płaszczyzny, a w punkcie $(0, 0)$ ma pochodne cząstkowe mieszane drugiego rzędu (tj. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$), to $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

C. Jeśli funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu (w każdym punkcie płaszczyzny) i są to funkcje ciągłe, to $f$ jest funkcją klasy $C^2$.

D. Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ klasy $C^1$ jest bijekcją, to jest dyfeomorfizmem klasy $C^1$.

E. Jeśli pochodna funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy $C^1$ nie ma miejsc zerowych, to zbiór $I = f(\mathbb{R})$ jest przedziałem otwartym, funkcja $f$ jest różnowartościowa i funkcja do niej odwrotna $f^{-1}\colon I \to \mathbb{R}$ jest klasy $C^1$.

---

**17.** Grupa $\mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/20$ jest izomorficzna z:

A. $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/60$

B. $\mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/15$

C. $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/5$

D. $\mathbb{Z}/120$

E. $\mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/8$

---

**18.** Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech $A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ będą dowolnymi zbiorami mierzalnymi. Które z poniższych zdań są prawdziwe:

A. $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

B. $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

E. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geqslant \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

---

**19.**

A. Każda funkcja holomorficzna $f\colon P \to \mathbb{C}$, gdzie $P = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 1 < |z| < 2\}$, jest różnicą dwóch funkcji holomorficznych, o dziedzinach (odpowiednio) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 2\}$ oraz $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 1\}$.

B. $\oint_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{z}\, \mathrm{d}z = 2\pi i$.

C. Jeśli ciąg wielomianów jednej zmiennej zespolonej zbiega do funkcji $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jednostajnie na zwartych podzbiorach płaszczyzny, to $u$ jest funkcją całkowitą.

D. Istnieje ograniczona funkcja holomorficzna

$$v\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},$$

taka że $v(z) = z$ dla $z \in \{1, 2\}$.

E. Zbiór waertości niestałej funkcji holomorficznej jest otwarty.

---

**20.** Poniżej $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ to ciąg o wyrazach w przestrzeni metrycznej $(X, d)$.

A. Jeśli przestrzeń $X$ jest zwarta, to zbiór wszystkich punktów skupienia ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w $X$ jest niepustym zbiorem zwartym.

B. Jeśli każdy podciąg ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg zbieżny do punktu $x \in X$, to ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $x$.

C. Jeśli metryka $d$ jest zupełna i ograniczona, to przestrzeń $X$ jest zwarta.

D. Jeśli dla pewnego punktu $x \in X$ zachodzi

$$\inf_{n>0} d(x_n, x) = 0,$$

to $x$ jest punktem skupienia ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

E. Jeśli $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, to $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego (względem $d$).

---