Test na studia III stopnia z matematyki
Wydział Matematyki i Informatyki UJ
14 września 2017

Przed Państwem test wielokrotnego wyboru. Po zapoznaniu się z pytaniami, proszę zaznaczyć w tabeli, na załączonej kartce, poprawne odpowiedzi do wybranych przez siebie 15 zadań oraz zaznaczyć te zadania, które Państwo wybrali. Punktacja pojedynczego pytania, gdy zaznaczono:

- wszystkie poprawne odpowiedzi (i żadnych niepoprawnych): **4 pkt**,
- tylko poprawne odpowiedzi, ale nie wszystkie: **2 pkt**,
- poprawne i niepoprawne odpowiedzi lub brak zaznaczenia: **0 pkt**,
- tylko niepoprawne odpowiedzi: **-1 pkt**.

Z testu można uzyskać 60 punktów: 15 pytań $\times$ 4 pkt = 60 pkt. Uzyskany wynik zostanie przemnożony przez 5/6.

1. Dla dowolnych macierzy 3×3 A i B zachodzi:

A. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

B. ślad macierzy AB jest równy iloczynowi śladów macierzy A i B,

C. ślad macierzy AB jest równy śladowi macierzy BA,

D. $AB = BA$,

E. rząd macierzy AB jest równy sumie rzędów macierzy A i B.

2. Poniżej $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ to ciąg liczb rzeczywistych.

A. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\limsup_{n\to\infty} |a_n| < \infty$.

B. Jeśli $\lim_{n\to\infty} n^k a_n = 0$ dla dowolnej liczby całkowitej $k > 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\alpha}$ jest bezwzględnie zbieżny dla każdej liczby rzeczywistej α.

C. Jeśli $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny.

D. Jeżeli $a_n \leqslant b_n$ dla wszelkich $n > 0$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

E. Jeśli $a_n \neq 0$ dla wszystkich n i $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są albo oba zbieżne, albo oba rozbieżne.

3.

A. Istnieje nieskończona grupa nieabelowa, która ma nieskończenie wiele parami nieizomorficznych skończonych podgrup abelowych.

B. Jeśli $a^2 = a$ dla dowolnego elementu a pierścienia R, to R jest pierścieniem przemiennym.

C. Jeśli a jest elementem nierozkładalnym w przemiennym pierścieniu R, to (a) jest ideałem pierwszym.

D. Każdy pierścień Euklidesa jest pieścieniem ideałów głównych.

E. Skończony pierścień całkowity jest ciałem.

4. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Wtedy:

A. X ma rozkład dyskretny.

B. $P(X > t + x | T > x) = P(T > x)$ dla $t, x > 0$.

C. $EX = 1/\lambda$.

D. Rozkład zmiennej X ma gęstość $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

E. $P(X = 0) > 0$.

5.

A. Jeśli $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest niestałą funkcją ciągłą, taką że $g(z + w) = g(z) + g(w)$ i $g(zw) = g(z)g(w)$ dla wszelkich $z, w \in \mathbb{C}$, to $g(z) = z$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

B. Funkcja $u\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dana wzorem $u(z) = z + \frac{1}{z}$ ma następującą własność: zbiór $u^{-1}(\{w\})$ jest dwuelementowy dla wszelkich $w \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$.

C. Ciąg $(z^n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny dla wszystkich liczb zespolonych z o module nie większym niż 1.

D. $\mathrm{Re}[(1 + i)^{2018}] = 0$.

E. Dla dowolnej liczby całkowitej $k > 0$:

$$\left(\sin\left(\frac{2\pi}{k}\right) + i\cos\left(\frac{2\pi}{k}\right)\right)^k = i^k.$$

6. Niech H oznacza przestrzeń Hilberta $L^2([0,2\pi])$.

A. Jeśli $f, g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ są ciągłe oraz $f \perp g$, to nośniki f i g są rozłączne.

B. Jeśli $f, g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ są ciągłe oraz nośniki f i g są rozłączne, to $f \perp g$.

C. W H nie ma przeliczalnej bazy ortonormalnej.

D. Rzut ortogonalny funkcji $f(x) = x \cdot \chi_{[0,1]}(x)$ (tutaj $\chi_{[0,1]}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $[0,1]$) na podprzestrzeń funkcji stałych przestrzeni H jest równy $g(x) = \frac{1}{2}$.

E. Dopełnienie ortogonalne zbioru $\{1, x, x^2\}$ jest przestrzenią wymiaru nieskończonego.

---

7. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

A. Zbiór Vitalego nie jest zbiorem borelowskim.

B. Wszystkie zbiory borelowskie w $\mathbb{R}^n$ są mierzalne w sensie Lebesgue'a,

C. Każdy podzbiór trójkowego zbioru Cantora jest zbiorem borelowskim.

D. Każdy podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest mierzalny w sensie Lebesque'a.

E. Każdy podzbiór trójkowego zbioru Cantora jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesque'a.

---

8. Poniżej A i B to zespolone macierze kwadratowe tego samego stopnia.

A. Jeśli macierz AB jest odwracalna, to A i B są odwracalne.

B. Jeśli wszystkie wyrazy macierzy A są rzeczywiste, to A ma przynajmniej jedną rzeczywistą wartość własną.

C. Jeśli macierz B jest odwracalna, to wielomiany charakterystyczne macierzy $B^{-1}AB$ i BAB^{-1} są identyczne.

D. Jeśli wszystkie wyrazy macierzy A są rzeczywiste i $A^2 = 0$, to $A = 0$.

E. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

9.

A. Dla parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, całka niewłaściwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2)^\alpha + 1}\,\mathrm{d}x$$

jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \geqslant 1$.

B. Jeśli $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, taką że

$$f(-x,-y) = -f(y,x)$$

dla wszelkich $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$\iint_{\{x^2+y^2 \leqslant 1\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

C. $\int_0^2 |x^3 - x|\,\mathrm{d}x = 2$.

D. Dla dowolnej liczby $A > 0$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.

E. Funkcja $\mathbb{R} \ni x \mapsto \int_0^1 \ln(1 + e^y + x^2)\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R}$ jest ciągła.

---

10. Grupą prostą jest:

A. $\mathbb{Z}/2$

B. $\mathbb{Z}/6$

C. S_3

D. A_4

E. A_5

---

11. Poniżej X i Y to zmienne losowe na pewnej wspólnej przestrzeni probabilistycznej.

A. Jeśli zmienna X jest niezależna od siebie samej, to $X = 0$ prawie wszędzie.

B. $E(X^2) \leqslant (E(X))^2$

C. Jeśli zmienne X i Y są niezależne i mają ten sam rozkład, to zmienna $Z = \frac{1}{2}(X+Y)$ ma również taki sam rozkład.

D. Jeśli zmienna X ma rozkład ciągły o gęstości f, to $E(e^X) = \int_{-\infty}^{\infty} e^t f(t)\,\mathrm{d}t$.

E. Jeśli zmienne X i Y są niezależne i mają ciągłe rozkłady, to $P(X^2 + Y^2 = 1) = 0$.

---

12. Które z poniższych własności są prawdziwe dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

A. Jeśli A jest niespójny, to $f(A)$ też jest niespójny.

B. Jeśli $f(A)$ jest zwarty, to A też jest zwarty.

C. Jeśli A jest domknięty, to $f(A)$ nie jest otwarty.

D. Jeśli $A = [1,2] \cup [3,4]$, to $f(A)$ jest ograniczony.

E. Jeśli $A = [1,2] \cup [3,4]$, to $f(A)$ ma co najwyżej dwie składowe spójne.

13.

A. Układ funkcji $x \mapsto e^{2x}$, $x \mapsto xe^{2x}$ stanowi bazę przestrzeni wektorowej składającej się z wszystkich funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniających równanie różniczkowe $f'' - 4f' + 4f = 0$.

B. Nie istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^∞, która spełnia równania $f^{(4)} + f = 0$ oraz $f(0) = 1$.

C. Punkt $(0,0)$ jest atraktorem układu $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x \end{cases}$.

D. Jeśli $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^∞, to każda funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie różniczkowe $f'(x) = F(f(x), x)$ również jest klasy C^∞.

E. Istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla której nie istnieje funkcja różniczkowalna $u\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, taka że $u(0) = 0$ oraz $u' = f \circ u$.

14.

A. Każdy częściowy porządek $R \subset X \times X$ na zbiorze X zawiera się w pewnej relacji $S \subset X \times X$, która jest liniowym porządkiem na X.

B. Jeśli a i b to dwa różńe elementy nieskończonego zbioru X, to istnieje bijekcja z X na $X \setminus \{a\}$, dla której b jest punktem stałym.

C. W zbiorze dobrze uporządkowanym istnieje co najwyżej jeden element, który nie ma poprzednika.

D. Jeśli $u\colon X \to \mathcal{P}(X)$ jest dowolną funkcją (gdzie $\mathcal{P}(X)$ to zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X), to zbiór $\{x \in X\colon\ x \notin u(x)\}$ nie jest wartością funkcji u.

E. Zbiór wszystkich ciągów rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.

---

15. Odwzorowanie liniowe $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ma w bazie kanonicznej macierz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Wtedy:

A. F jest epimorfizmem,

B. F jest monomorfizmem,

C. wektor $(2,4,0,9)$ należy do obrazu F,

D. $\det(A) = 239$,

E. 9 jest wartością własną macierzy A.

16.

A. Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, to istnieją wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu w punkcie $(0,0)$.

B. Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie płaszczyzny, a w punkcie $(0,0)$ ma pochodne cząstkowe mieszane drugiego rzędu (tj. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$), to $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

C. Jeśli funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu (w każdym punkcie płaszczyzny) i są to funkcje ciągłe, to f jest funkcją klasy C^2.

D. Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ klasy C^1 jest bijekcją, to jest dyfeomorfizmem klasy C^1.

E. Jeśli pochodna funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^1 nie ma miejsc zerowych, to zbiór $I = f(\mathbb{R})$ jest przedziałem otwartym, funkcja f jest różnowartościowa i funkcja do niej odwrotna $f^{-1}\colon I \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1.

---

17. Grupa $\mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/20$ jest izomorficzna z:

A. $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/60$

B. $\mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/15$

C. $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/5$

D. $\mathbb{Z}/120$

E. $\mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/8$

---

18. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech A_n $(n \in \mathbb{N})$ będą dowolnymi zbiorami mierzalnymi. Które z poniższych zdań są prawdziwe:

A. $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

B. $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

E. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geqslant \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

19.

A. Każda funkcja holomorficzna $f\colon P \to \mathbb{C}$, gdzie $P = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 1 < |z| < 2\}$, jest różnicą dwóch funkcji holomorficznych, o dziedzinach (odpowiednio) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 2\}$ oraz $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > 1\}$.

B. $\oint_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$.

C. Jeśli ciąg wielomianów jednej zmiennej zespolonej zbiega do funkcji $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jednostajnie na zwartych podzbiorach płaszczyzny, to u jest funkcją całkowitą.

D. Istnieje ograniczona funkcja holomorficzna

$$v\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},$$

taka że $v(z) = z$ dla $z \in \{1, 2\}$.

E. Zbiór waertości niestałej funkcji holomorficznej jest otwarty.

---

20. Poniżej $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ to ciąg o wyrazach w przestrzeni metrycznej (X, d).

A. Jeśli przestrzeń X jest zwarta, to zbiór wszystkich punktów skupienia ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w X jest niepustym zbiorem zwartym.

B. Jeśli każdy podciąg ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg zbieżny do punktu $x \in X$, to ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x.

C. Jeśli metryka d jest zupełna i ograniczona, to przestrzeń X jest zwarta.

D. Jeśli dla pewnego punktu $x \in X$ zachodzi

$$\inf_{n>0} d(x_n, x) = 0,$$

to x jest punktem skupienia ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

E. Jeśli $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, to $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego (względem d).
