Test na studia III stopnia z matematyki
Wydział Matematyki i Informatyki UJ
6 lipca 2017

Przed Państwem test wielokrotnego wyboru. Po zapoznaniu się z jego treścią, proszę zaznaczyć w tabeli, na załączonej kartce, poprawne zdania spośród A–E w wybranych przez siebie 15 zadaniach oraz zaznaczyć te zadania, które Państwo wybrali. Punktacja pojedynczego zadania, gdy zaznaczono:

- wszystkie poprawne zdania (i żadnych niepoprawnych): **4 pkt**,
- tylko poprawne zdania, ale nie wszystkie: **2 pkt**,
- poprawne i niepoprawne zdania lub brak zaznaczenia: **0 pkt**,
- tylko niepoprawne zdania: **-1 pkt**.

Z testu można uzyskać 60 punktów: 15 pytań $\times$ 4 pkt = 60 pkt. Uzyskany wynik zostanie przemnożony przez 5/6.

---

1. Które z podanych liczb zespolonych należą do domknięcia koła jednostkowego w $\mathbb{C}$?

A. $\cos(i) + i\sin(i)$

B. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i)^{45}$

C. $\cos(1)$

D. $e^{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$

E. $\sin^2(1+i) + \cos^2(1+i)$

---

2. Dla macierzy rzeczywistej $A \in M(m,n)$ oznaczamy przez $\mathrm{Ker}(A)$ oraz $\mathrm{Im}(A)$ jądro oraz obraz odwzorowania liniowego $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ danego wzorem $f(x) = Ax$. Wtedy:

A. $\mathrm{Im}(A) \perp \mathrm{Ker}(A^T)$.

B. $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A^T) = \mathbb{R}^m$.

C. $\text{rząd}(AA^T) = \text{rząd}(A^TA) = \text{rząd}(A)$.

D. AA^T jest dodatnio określona.

E. W przypadku $m = n$: AA^T jest nieosobliwa $\iff$ A jest nieosobliwa.

---

3. Poniżej płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ rozważana jest z topologią naturalną.

A. Żaden podzbiór płaszczyzny nie jest jednocześnie otwarty i domknięty.

B. Jeśli K jest podzbiorem płaszczyzny homeomorficznym z okręgiem, to zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus K$ jest niespójny.

C. Każdy niepusty podzbiór otwarty płaszczyzny zawiera podzbiór domknięty o niepustym wnętrzu.

D. Rodzina wszystkich podzbiorów otwartych płaszczyzny jest równoliczna z rodziną wszystkich zwartych podzbiorów płaszczyzny.

E. Zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ jest niespójny.

4.

A. Jeżeli $a, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, to $a^{\phi(n)} \equiv -1 \pmod{n}$, gdzie ϕ jest funkcją Eulera.

B. Liczba podgrup normalnych grupy $\mathbb{Z} \times \mathbb{S}_3$ jest nieskończona. (Tutaj $\mathbb{S}_3$ to grupa permutacji zbioru $\{1,2,3\}$).

C. Jeśli G jest grupą skończoną i H jest podgrupą G, to $|H| \,\big|\, [G:H]$.

D. Jeżeli $f \in \mathbb{Z}[X]$ jest wielomianem nierozkładalnym w $\mathbb{Z}[X]$, to jest wielomianem nierozkładalnym w $\mathbb{Q}[X]$.

E. Dla każdej liczby pierwszej p, istnieje ciało skończone o 4^p elementach.

---

5. Poniżej X i Y to dowolne zmienne losowe określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

A. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład ciągły (czyli istnieje gęstość tego rozkładu) $\iff$ X oraz Y mają rozkłady ciągłe.

B. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład dyskretny $\iff$ X oraz Y mają rozkłady dyskretne.

C. Jeżeli $E(X)$ oraz $E(Y)$ są skończone, to istnieje taka funkcja borelowska h, że $E(Y|X) = h(Y)$.

D. Jeżeli $E(Y)$ jest skończona, to istnieje taka funkcja borelowska h, że $E(Y|X) = h(X)$.

E. Jeżeli wektor losowy (X,Y) ma rozkład ciągły, f jest funkcją ciągłą, to zmienna losowa $f(X,Y)$ ma rozkład ciągły.

6. Niech $f(x) = \frac{1}{x}$.

A. $f \in L^1(1, \infty)$

B. $f \in L^1(0, 1)$

C. $f \in L^2(1, \infty)$

D. $f \notin L^2(0, 1)$

E. $f \in L^p(0, 1)$ dla $p > 2$

---

7. Niech $f\colon [-2, 2]^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, klasy C^2 w $(-2, 2)^2$.

A. Jeśli f ma ekstremum lokalne w punkcie $(0, 0)$, to funkcja

$$(0, 2) \ni t \mapsto f(1-t, t-1) \in \mathbb{R}$$

ma ekstremum lokalne w punkcie 1.

B. Pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ znikają w punkcie, w którym funkcja f osiąga wartość największą.

C. Jeśli $u(t) = f(\sin(t), \cos(t))$, to

$$\begin{aligned} u'(t) = &\frac{\partial f}{\partial x}(\sin(t), \cos(t)) \sin(t) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(\sin(t), \cos(t)) \cos(t). \end{aligned}$$

D. Funkcja $g(x, y) = f(y, x)$ (dla $(x, y) \in (-1, 1)^2$) spełnia równania $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$.

E. $\int_{-1}^{1} \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)\, \mathrm{d}\, t = f(1, 0) - f(-1, 0)$.

---

8. Poniżej X i Y to dowolne zbiory.

A. Jeśli istnieje iniekcja z X w Y, to istnieje suriekcja z Y na X.

B. Jeśli istnieje suriekcja z X na Y, to istnieje iniekcja z Y w X.

C. Jeśli istnieją iniekcja z X w Y oraz suriekcja z X na Y, to istnieje bijekcja między X a Y.

D. Jeśli zbiory X i Y są nieskończone, to zbiory X^Y oraz Y^X są równoliczne (X^Y to zbiór wszystkich funkcji z Y w X).

E. Jeśli zbiory X i Y są dobrze uporządkowane, to istneje ściśle rosnąca funkcja z X w Y lub z Y w X.

---

9. Macierz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

A. jest odwracalna,

B. ma wyznacznik równy 0,

C. ma wartości własne $1, 5, 0, 9$,

D. jest symetryczna,

E. jest ortogonalna.

---

10. Niech $\varphi_n\colon \ell^p \to \mathbb{R}$ ($p \in [1, \infty)$, $n \geqslant 0$) będzie dane wzorem $\varphi_n(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{j=0}^{n} x_j$.

A. Jeśli $p = 1$, to $\sup\{\varphi_n(x)\colon\ n \geqslant 0\} < \infty$ dla wszelkich $x \in \ell^1$.

B. Jeśli $p = 2$, to $\sup\{\varphi_n(x)\colon\ n \geqslant 0\} < \infty$ dla wszelkich $x \in \ell^2$.

C. Odzworowanie φ_n jest ciągłe dla każdej liczby $p \in [1, \infty)$ oraz $n \geqslant 0$.

D. Jeśli $p = 2$, to $\|\varphi_n\| \leqslant 1$ dla wszelkich $n \geqslant 0$.

E. Jeśli $p = 1$, to $\|\varphi_n\| \leqslant 1$ dla wszelkich $n \geqslant 0$.

---

11. Funkcja $g\colon \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna. Wtedy:

A. g rozwija się w szereg Taylora w zerze o promieniu zbieżności nie mniejszym niż 1,

B. g rozwija się w szereg Laurenta o środku w 2,

C. g musi się przedłużać do funkcji holomorficznej na całej płaszczyźnie zespolonej,

D. zachodzi równość $\oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{z}\, \mathrm{d}z = 0$,

E. zachodzi równość $\lim_{z \to 2} |g(z)| = +\infty$.

---

12. Permutacja $(1, 2)(3, 4, 5) \in S_8$

A. jest parzysta,

B. ma rząd 6,

C. jest przemienna z permutacją $(3, 4, 5)(6, 7, 8)$,

D. jest sprzężona z permutacją $(3, 4, 5)(6, 7, 8)$,

E. jest odwrotna do permutacji $(2, 1)(5, 4, 3)$.

---

13. Poniżej x oraz y oznaczają niewiadome funkcje jednej zmiennej rzeczywistej (o wartościach rzeczywistych).

A. Wśród rozwiązań równania różniczkowego
$$x' = 1 + x^2$$
jest takie, którego dziedziną jest cała prosta.

B. Zbiór rozwiązań (o maksymalnej dziedzinie) równania różniczkowego $x'' + 2x' + 4x = 0$ spełniających warunek $x(0) = 0$ jest jednowymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.

C. Zagadnienie $\begin{cases} x'' + 3x' + 3x + 1 = 0 \\ x(0) = x'(0) \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

D. Punkt $(0,0)$ jest siodłem w układzie autonomicznym $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$.

E. Funkcja $V(x,y) = 1 - \cos(y) + \frac{1}{2}x^2$ jest funkcją Lapunowa dla punktu równowagi $(0,0)$ układu
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin(x) - 2y \end{cases}.$$

---

14. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką prostą z rozkładu jednostajnego $U(0,a)$. Oznaczamy: $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$, $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Wtedy:

A. $2\bar{X}_n$ jest estymatorem nieobciążonym i zgodnym parametru a.

B. M_n jest estymatorem nieobciążonym i zgodnym parametru a.

C. $2\bar{X}_n$ jest estymatorem parametru a otrzymanym za pomocą metody największej wiarygodności.

D. M_n jest estymatorem parametru a otrzymanym za pomocą metody największej wiarygodności.

E. Można tak dobrać liczby $0 < \beta_n < 1$, że $\bar{X}_n + \beta_n M_n$ jest estymatorem nieobciążonym i zgodnym parametru a.

15.

A. Funkcja $\mathbb{R} \ni x \mapsto x|x| \in \mathbb{R}$ jest klasy C^1.

B. Zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}\colon\ x^2 = y^3\}$ jest rozmaitością klasy C^1.

C. Funkcja $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ nie ma granicy w $(0,0)$.

D. Funkcja $\mathbb{R} \ni x \mapsto \int_0^1 \sin(x^2 + t^3)\ dt \in \mathbb{R}$ jest klasy C^∞.

E. Funkcja odwrotna do funkcji $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 - 6x^2 + 12x \in \mathbb{R}$ jest analityczna w sensie rzeczywistym.

---

16. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją.

A. Jeżeli f jest ciągła, to jest mierzalna w sensie Lebesgue'a.

B. Jeżeli f jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, to jest ciągła prawie wszędzie.

C. Jeżeli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to nośnik f jest zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^n$.

D. Każdy podzbiór „trójkowego" zbioru Cantora jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

E. Funkcja f jest mierzalna w sensie Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $|f|$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a.

---

17. Który z poniższych rozkładów ma najmniejszą entropię?

A. $1/2, 1/4, 1/4$

B. $1/8, 1/8, 3/4$

C. $1/2, 1/2$

D. $1/4, 1/4, 1/4, 1/4$

E. $1/4, 1/16, 11/16$

---

18. Poniżej $(a_n)_{n=1}^\infty$ to ciąg liczb rzeczywistych.

A. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny, to także $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ jest szeregiem zbieżnym.

B. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ jest zbieżny, to także $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n}$ jest szeregiem zbieżnym.

C. Wzór ogólny ciągu zadanego rekurencją $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ ma postać $a_n = \alpha \cdot (-1)^n + \beta \cdot 3^n$.

D. Jeśli zachodzi zależność $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ (dla wszelkich n), to ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest rozbieżny.

E. Jeśli $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = 0$, to $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem zbieżnym.

19.

A. Każda grupa rzędu 24 zawiera podgrupę rzędu 8.

B. Każda podgrupa rzędu 6 grupy rzędu 12 jest normalna.

C. Grupa A_4 zawiera podgrupę rzędu 6.

D. Pierścień $\mathbb{Z}/6$ jest pierścieniem całkowitym.

E. Liczba jedności pierścienia $\mathbb{Z}/12$ jest równa 11.

20.

A. W dowolnej przestrzeni metrycznej zbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

B. W dowolnej przestrzeni metrycznej brzeg zbioru zwartego jest zwarty.

C. W dowolnej przestrzeni metrycznej zachodzi implikacja: jeśli brzeg zbioru domkniętego A jest zwarty, to zbiór A też jest zwarty.

D. W dowolnej przestrzeni metrycznej zbiór skończony jest zwarty.

E. Istnieje niezwarta przestrzeń metryczna, w której pewien niepusty zbiór zwarty jest otwarty.