

Egzamin sprawdzający na studia doktoranckie z matematyki na UJ

19 września 2016

Czas trwania: 180 minut

Rozwiązać należy pięć dowolnie wybranych zadań.

1 (analiza) Oblicz całkę $\int_{-1}^1 \left(\int_{|x|}^1 \left(\int_{-3\pi^2 \sin(\pi y^3)}^{4/(y^4+1)} 5x^4 dz \right) dy \right) dx$.

2 (topologia) Niech

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : 0 \in A \text{ lub } \text{zbiór } \mathbb{R} \setminus A \text{ jest skończony}\},$$

$$\mathcal{B} = \{B \subset \mathbb{R} : 0 \notin B \text{ lub } \text{zbiór } \mathbb{R} \setminus B \text{ jest skończony}\}.$$

Pokaż, że jedna z tych rodzin jest topologią w \mathbb{R} , a druga nie jest. Pokaż, że otrzymana przestrzeń topologiczna jest Hausdorffa i normalna.

3 (analiza na rozmaitościach) Wykaż, że dla dowolnych dwóch punktów x i y spójnej rozmaitości Riemanna M istnieje gładki dyfeomorfizm $h: M \rightarrow M$ taki, że $h(x) = y$.

4 (analiza funkcjonalna) W przestrzeni $C^1([0, 1])$ funkcji rzeczywistych klasy C^1 na odcinku $[0, 1]$ rozważamy normę $\|f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$. Zbadaj ciągłość funkcjonału

$$C^1([0, 1]) \ni f \mapsto f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right) \in \mathbb{R}$$

i wyznacz jego normę, jeśli jest ciągły.

5 (teoria mnogości) Niech R będzie przechodnią relacją na niepustym zbiorze X , taką że:

$$\forall a, b \in X: aRb \wedge bRa \implies a = b.$$

Wykaż, że istnieje liniowy porządek S na X taki, że $R \subset S$.

6 (kombinatoryka) Zbadaj, na ile różnych sposobów można rozdzielić n numerowanych miejsc na parkingu na kampusie ($n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 50$), gdzie pracują astronomowie, biolodzy, chemicy, fizycy, geografowie, informatycy oraz matematycy, tak, aby łączna liczba miejsc dla astronomów, fizyków, informatyków oraz matematyków była nieparzysta.

7 (algebra) Sprawdź, czy któryś z pierścieni:

$$P = \mathbb{Z}_3[X]/(X^2 + 1), \quad R = \mathbb{Z}_3[X]/(X^2 + 2)$$

jest ciałem. W przypadku, gdy jest ciałem, podaj liczbę jego elementów i sprawdź, czy jest to ciało algebraicznie domknięte.

8 (teoria liczb) Niech p będzie liczbą pierwszą różną od 2 oraz niech r będzie pierwiastkiem pierwotnym modulo p . Uzasadnij, że $r^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$.

[9] (*funkcje analityczne*) Niech $\Omega := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $p(z) = z^2 - 2$, $g(z) = z^2$ oraz

$$h : \Omega \ni z \mapsto z + \frac{1}{z} \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2] \quad (h(\infty) := \infty).$$

Pokaż, że h jest bijekcją, $h \circ g|_{\Omega} = p \circ h$ oraz

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{ciąg } (p^n(z))_{n=1}^{\infty} \text{ jest ograniczony}\} = [-2, 2].$$

(p^n to złożenie n egzemplarzy wielomianu p , tj. $p \circ p \circ \dots \circ p$).

[10] (*teoria miary*) Niech $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ będzie miarą taką, że $\mu(\mathcal{A}) = \{0, 1\}$. Wykaż, że jeśli \mathcal{A} jest skończoną σ -algebrą podzbiorów zbioru X , to $\mu = \delta_x$ dla pewnego $x \in X$. Czy ta sama konkluzja pozostaje prawdziwa dla dowolnej σ -algebry \mathcal{A} ? (Miarą $\delta_x : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ przypisuje zbiorowi $A \in \mathcal{A}$ wartość 1, jeśli $x \in A$, a w przeciwnym wypadku – wartość 0.)

[11] (*układy dynamiczne*) Znajdź wszystkie punkty stacjonarne układu dynamicznego generowanego przez układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{cases} x' = xy^2 - 9x - 16y^3 \\ y' = 4xy^2 + 2x^2y \end{cases}$$

i zbadaj ich stabilność.

[12] (*rachunek prawdopodobieństwa, procesy stochastyczne*) Leonhard Euler wędruje po siedmiu mostach przerzuconych w Królewcu przez rzekę Pregolę (zob. rysunek poniżej), łączących cztery części miasta: dwa brzegi rzeki, południowy (B) i północny (C), oraz dwie wyspy na Pregole oznaczone na rysunku przez (A) i (D).

Euler zaczyna swój spacer od północnego brzegu rzeki i wędruje tak długo, aż tam znów powróci, przy czym podczas pobytu w danej części miasta każdy dostępny w niej most wybiera z takim samym prawdopodobieństwem. Pokaż, że na pewno (czyli z prawdopodobieństwem 1) wróci on na północny brzeg i oblicz, ile mostów przejdzie średnio, zanim to się stanie.

